DS

Tutorial

Norina Grosch, Sebastian Reichmann

22. Oktober 2019

Organisatorisches

Feedback, Kritik, Wünsche per Unimail an:

- norina.marie.grosch [at] uni-weimar.de
- sebastian.reichmann [at] uni-weimar.de

Bitte an beide Mails, dann bekommt ihr schneller eine Antwort.
Die Folien findet ihr :

`www.uni-weimar.de/~qari3759/tutorium`

Organisatorisches

Feedback, Kritik, Wünsche per Unimail an:

- norina.marie.grosch [at] uni-weimar.de
- sebastian.reichmann [at] uni-weimar.de

Bitte an beide Mails, dann bekommt ihr schneller eine Antwort.
Die Folien findet ihr :
`www.uni-weimar.de/~qari3759/tutorium`

Am Besten bis Freitag Abend, damit wir es noch einarbeiten können ;)

Organisatorisches

Feedback, Kritik, Wünsche per Unimail an:

- norina.marie.grosch [at] uni-weimar.de
- sebastian.reichmann [at] uni-weimar.de

Bitte an beide Mails, dann bekommt ihr schneller eine Antwort.
Die Folien findet ihr :
`www.uni-weimar.de/~qari3759/tutorium`

Am Besten bis Freitag Abend, damit wir es noch einarbeiten können ;)

Das Tutoriat ist nicht für das Lösen der Übungsaufgaben bestimmt!

Ablauf

1. Anmerkungen zu Belegabgaben
2. Stoffwiederholung

Section 1

Anmerkungen zu Belegabgaben

Abgaben

- per Mail an `jannis.bossert [at] uni-weimar.de` in Form einer PDF
- oder in der Übung am Abgabetag bei Jannis
- Programmieraufgaben immer per Mail an Jannis.
- Wenn mehrere Dateien gesendet werden, bitte als .zip
- Namensschema beachten (steht dann auf dem Blatt oder der Website)

Section 2

Stoffwiederholung

Wahrheitstabellen

A	B	A $\wedge$ B
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Wahrheitstabellen

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Bitte nutzt `0` und `1` in euren Wahrheitstabellen, nicht `w`, `f`, `t`.

Modulare Restklassen

Für beliebige $a, b, n \in \mathbb{N}$ gilt:

- $(a + b) \equiv (a \mod n) + (b \mod n) \pmod{n}$
- $(a \cdot b) \equiv (a \mod n) \cdot (b \mod n) \pmod{n}$
- $a^b \equiv (a \mod n)^b \pmod{n}$

Polynomdivision

$$(3x^3 \quad +8x^2 \quad +10x \quad +3) \quad : (3x-1) =$$

Polynomdivision

$$
\begin{array}{cccccc}
(3x^3 & +8x^2 & +10x & +3) & :(3x-1) = & x^2 \\
3x^3 & -x^2 & & & & \\
\hline
 & (9x^2 & +10x & +3) & :(3x-1) = & x^2
\end{array}
$$

Polynomdivision

$$
\begin{array}{rrrrl}
(3x^3 & +8x^2 & +10x & +3) & : (3x-1) = \quad x^2 \\
3x^3 & -x^2 & & & \\
\hline
 & (9x^2 & +10x & +3) & : (3x-1) = \quad x^2 + 3x \\
 & 9x^2 & -3x & & \\
\hline
 & & (13x & +3) & : (3x-1) = \quad x^2 + 3x
\end{array}
$$

Polynomdivision

$$
\begin{array}{rrrrl}
(3x^3 & +8x^2 & +10x & +3) & :(3x-1) = \quad x^2 \\
3x^3 & -x^2 & & & \\
\hline
 & (9x^2 & +10x & +3) & :(3x-1) = \quad x^2+3x \\
 & 9x^2 & -3x & & \\
\hline
 & & (13x & +3) & :(3x-1) = \quad x^2+3x+4 \\
 & & 12x & -4 & \\
\hline
 & & (x & +7) & :(3x-1) = \quad x^2+3x+4
\end{array}
$$

Polynomdivision

$$
\begin{array}{rrrrl}
(3x^3 & +8x^2 & +10x & +3) & :(3x-1) = \quad x^2 \\
3x^3 & -x^2 & & & \\
\hline
 & (9x^2 & +10x & +3) & :(3x-1) = \quad x^2+3x \\
 & 9x^2 & -3x & & \\
\hline
 & & (13x & +3) & :(3x-1) = \quad x^2+3x+4 \\
 & & 12x & -4 & \\
\hline
 & & (x & +7) & :(3x-1) = \quad x^2+3x+4
\end{array}
$$

$$= (x^2+3x+4) + \frac{x+7}{3x-1}$$

Polynomdivision - Übungsaufgabe

$(3x^3 - 10x^2 + 7x - 12) : (x - 3) =$

$$
\begin{array}{rrrrl}
(3x^3 & -10x^2 & +7x & -12) & : (x-3) = \quad 3x^2 \\
-3x^3 & -9x^2 & & & \\
\hline
 & (-x^2 & +7x & -12) & : (x-3) = \quad 3x^2 - x \\
 & -x^2 & +3x & & \\
\hline
 & & (4x & -12) & : (x-3) = \quad 3x^2 - x + 4 \\
 & & 4x & -12 & \\
\hline
 & & & 0 & : (x-3) = \quad 3x^2 - x + 4
\end{array}
$$

Vollständige Induktion

Idee:

- Man beweist, dass wenn eine Behauptung für n gilt, sie auch für $n+1$ gilt
- Dann muss man nur noch zeigen, dass sie für das niedrigste Element ("Basis") gilt

Vorgehen:

- Induktionsbehauptung/ -voraussetzung aufstellen
- Induktionsanfang: Zeigen, dass die Induktionsbehauptung für die Basis gilt
- Induktionsschritt: Zeigen, dass die Induktionsbehauptung für $n+1$ gilt, wenn sie für n gilt

Fibonacci-Folge: Vollständige Induktion

- Induktionsbehauptung

Fibonacci-Folge: Vollständige Induktion

- Induktionsbehauptung
  - Die geschlossene Formel der Finbonacci-Folge $F_n = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ ist korrekt.

Fibonacci-Folge: Vollständige Induktion

- Induktionsbehauptung
  - Die geschlossene Formel der Finbonacci-Folge $F_n = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ ist korrekt.
- Induktionsanfang

Fibonacci-Folge: Vollständige Induktion

- Induktionsbehauptung
  - Die geschlossene Formel der Finbonacci-Folge $F_n = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ ist korrekt.
- Induktionsanfang
  - $F_0 = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^0 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^0}{\sqrt{5}} = \frac{1-1}{\sqrt{5}} = 0$

Fibonacci-Folge: Vollständige Induktion

- Induktionsbehauptung
  - Die geschlossene Formel der Finbonacci-Folge $F_n = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ ist korrekt.
- Induktionsanfang
  - $F_0 = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^0 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^0}{\sqrt{5}} = \frac{1-1}{\sqrt{5}} = 0$
  - $F_1 = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^1 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^1}{\sqrt{5}} = 1$

Fibonacci-Folge: Vollständige Induktion

- Induktionsbehauptung
  - Die geschlossene Formel der Finbonacci-Folge $F_n = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ ist korrekt.
- Induktionsanfang
  - $F_0 = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^0 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^0}{\sqrt{5}} = \frac{1-1}{\sqrt{5}} = 0$
  - $F_1 = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^1 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^1}{\sqrt{5}} = 1$
- Induktionsschritt
  - $\mu = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ und $\delta = (\frac{1-\sqrt{5}}{2})$ und es gilt $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$

Fibonacci-Folge: Vollständige Induktion

- Induktionsbehauptung
  - Die geschlossene Formel der Finbonacci-Folge $F_n = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ ist korrekt.
- Induktionsanfang
  - $F_0 = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^0 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^0}{\sqrt{5}} = \frac{1-1}{\sqrt{5}} = 0$
  - $F_1 = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^1 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^1}{\sqrt{5}} = 1$
- Induktionsschritt
  - $\mu = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ und $\delta = (\frac{1-\sqrt{5}}{2})$ und es gilt $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$
  - $F_{n+1} = \frac{\mu^n - \delta^n}{\sqrt{5}} + \frac{\mu^{n-1} - \delta^{n-1}}{\sqrt{5}} = \frac{(\mu^n + \mu^{n-1}) - (\delta^n + \delta^{n-1})}{\sqrt{5}}$

Fibonacci-Folge: Vollständige Induktion

- Induktionsbehauptung
  - Die geschlossene Formel der Finbonacci-Folge $F_n = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ ist korrekt.
- Induktionsanfang
  - $F_0 = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^0 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^0}{\sqrt{5}} = \frac{1-1}{\sqrt{5}} = 0$
  - $F_1 = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^1 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^1}{\sqrt{5}} = 1$
- Induktionsschritt
  - $\mu = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ und $\delta = (\frac{1-\sqrt{5}}{2})$ und es gilt $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$
  - $F_{n+1} = \frac{\mu^n - \delta^n}{\sqrt{5}} + \frac{\mu^{n-1} - \delta^{n-1}}{\sqrt{5}} = \frac{(\mu^n + \mu^{n-1}) - (\delta^n + \delta^{n-1})}{\sqrt{5}}$
    $= \frac{\mu^n(1+1/\mu) - \delta^n(1+1/\delta)}{\sqrt{5}}$

Fibonacci-Folge: Vollständige Induktion

- Induktionsbehauptung
  - Die geschlossene Formel der Finbonacci-Folge $F_n = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ ist korrekt.
- Induktionsanfang
  - $F_0 = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^0 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^0}{\sqrt{5}} = \frac{1-1}{\sqrt{5}} = 0$
  - $F_1 = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^1 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^1}{\sqrt{5}} = 1$
- Induktionsschritt
  - $\mu = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ und $\delta = (\frac{1-\sqrt{5}}{2})$ und es gilt $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$
  - $F_{n+1} = \frac{\mu^n - \delta^n}{\sqrt{5}} + \frac{\mu^{n-1} - \delta^{n-1}}{\sqrt{5}} = \frac{(\mu^n + \mu^{n-1}) - (\delta^n + \delta^{n-1})}{\sqrt{5}}$
    $= \frac{\mu^n(1+1/\mu) - \delta^n(1+1/\delta)}{\sqrt{5}} = \frac{\mu^{n+1} - \delta^{n+1}}{\sqrt{5}}$
  - mit $(1 + 1/\mu) = \mu$ und $(1 + 1/\delta) = \delta$

$\square$

Induktion - Übungsaufgabe

Induktionsbehauptung:

Die Funktion $\prod_{i=1}^{n} \frac{i+2}{i} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang: $n = 1$

$\prod_{i=1}^{1} \frac{i+2}{i} = \frac{1+2}{1} = 2$ und $\frac{(1+1)\cdot(1+2)}{2} = 2$

Induktionsschritt:

- Nun ist zu zeigen das die IB auch für $n + 1$ gilt.
- Es muss gelten $\prod_{i=1}^{n+1} \frac{i+2}{i} = \frac{((n+1)+1)\cdot((n+1)+2)}{2}$
- $\prod_{i=1}^{n+1} \frac{i+2}{i} = \prod_{i=1}^{n} \frac{i+2}{i} \cdot \frac{(n+1)+2}{(n+1)} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2} \cdot \frac{(n+1)+2}{(n+1)} = \frac{(n+2)\cdot(n+3)}{2}$

Direkter Beweis

- Beweis durch logische Schlussfolgerung

Direkter Beweis

- Beweis durch logische Schlussfolgerung
- Behauptung:
  - Die Summe zweier Primzahlzwillinge (p ist prim, $p+2$ ist prim, $p \geq 5$) ist immer ganzzahlig durch 12 teilbar.
  - $p + (p+2) = z$ und $12|z$

Direkter Beweis

- Beweis durch logische Schlussfolgerung
- Behauptung:
  - Die Summe zweier Primzahlzwillinge (p ist prim, $p + 2$ ist prim, $p \geq 5$) ist immer ganzzahlig durch 12 teilbar.
  - $p + (p + 2) = z$ und $12|z$
- Beweis:
  - Umformen: $p + (p + 2) = 2 \cdot (p + 1) = z$

Direkter Beweis

- Beweis durch logische Schlussfolgerung
- Behauptung:
  - Die Summe zweier Primzahlzwillinge (p ist prim, $p+2$ ist prim, $p \geq 5$) ist immer ganzzahlig durch 12 teilbar.
  - $p+(p+2)=z$ und $12|z$
- Beweis:
  - Umformen: $p+(p+2)=2\cdot(p+1)=z$
  - Wissen: p ist prim, deshalb ist $(p+1)$ gerade
  - Das doppelte einer geraden Zahl ist durch 4 teilbar

Direkter Beweis

- Beweis durch logische Schlussfolgerung
- Behauptung:
    - Die Summe zweier Primzahlzwillinge (p ist prim, $p+2$ ist prim, $p \geq 5$) ist immer ganzzahlig durch 12 teilbar.
    - $p + (p+2) = z$ und $12|z$
- Beweis:
    - Umformen: $p + (p+2) = 2 \cdot (p+1) = z$
    - Wissen: p ist prim, deshalb ist $(p+1)$ gerade
    - Das doppelte einer geraden Zahl ist durch 4 teilbar
    - $\rightarrow 4|z$

Direkter Beweis

- Beweis durch logische Schlussfolgerung
- Behauptung:
  - Die Summe zweier Primzahlzwillinge (p ist prim, $p + 2$ ist prim, $p \geq 5$) ist immer ganzzahlig durch 12 teilbar.
  - $p + (p + 2) = z$ und $12|z$
- Beweis:
  - Umformen: $p + (p + 2) = 2 \cdot (p + 1) = z$
  - Wissen: p ist prim, deshalb ist $(p + 1)$ gerade
  - Das doppelte einer geraden Zahl ist durch 4 teilbar
  - $\rightarrow 4|z$
  - Wissen: Eine von drei aufeinander folgenden Zahlen ist durch drei teilbar.
  - p, $p + 1$, $p + 2$ sind aufeinander folgende Zahlen

Direkter Beweis

- Beweis durch logische Schlussfolgerung
- Behauptung:
  - Die Summe zweier Primzahlzwillinge (p ist prim, $p + 2$ ist prim, $p \geq 5$) ist immer ganzzahlig durch 12 teilbar.
  - $p + (p + 2) = z$ und $12|z$
- Beweis:
  - Umformen: $p + (p + 2) = 2 \cdot (p + 1) = z$
  - Wissen: p ist prim, deshalb ist $(p + 1)$ gerade
  - Das doppelte einer geraden Zahl ist durch 4 teilbar
  - $\rightarrow 4|z$
  - Wissen: Eine von drei aufeinander folgenden Zahlen ist durch drei teilbar.
  - p, $p + 1$, $p + 2$ sind aufeinander folgende Zahlen
  - p und $p + 2$ sind prim, deshalb $3|p + 1$

Direkter Beweis

- Beweis durch logische Schlussfolgerung
- Behauptung:
  - Die Summe zweier Primzahlzwillinge (p ist prim, $p+2$ ist prim, $p \geq 5$) ist immer ganzzahlig durch 12 teilbar.
  - $p + (p+2) = z$ und $12|z$
- Beweis:
  - Umformen: $p + (p+2) = 2 \cdot (p+1) = z$
  - Wissen: p ist prim, deshalb ist $(p+1)$ gerade
  - Das doppelte einer geraden Zahl ist durch 4 teilbar
  - $\rightarrow 4|z$
  - Wissen: Eine von drei aufeinander folgenden Zahlen ist durch drei teilbar.
  - p, $p+1$, $p+2$ sind aufeinander folgende Zahlen
  - p und $p+2$ sind prim, deshalb $3|p+1$
  - $\rightarrow 3|z$ und $\rightarrow 3 \cdot 4|z = 12|z$

$\square$

Indirekter Beweis

- Beweis durch Widerspruch
- Behauptung:
  $a, b \geq 0$ sind zwei reele Zahlen und es gilt $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$

Indirekter Beweis

- Beweis durch Widerspruch
- Behauptung:
  $a, b \geq 0$ sind zwei reele Zahlen und es gilt $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$
- Widerspruch: Es gilt $\frac{a+b}{2} < \sqrt{a \cdot b}$

Indirekter Beweis

- Beweis durch Widerspruch
- Behauptung:
  $a, b \geq 0$ sind zwei reele Zahlen und es gilt $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$
- Widerspruch: Es gilt $\frac{a+b}{2} < \sqrt{a \cdot b}$
  - $\frac{a+b}{2} < \sqrt{a \cdot b}$

Indirekter Beweis

- Beweis durch Widerspruch
- Behauptung:
  $a, b \geq 0$ sind zwei reele Zahlen und es gilt $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$
- Widerspruch: Es gilt $\frac{a+b}{2} < \sqrt{a \cdot b}$
  - $\frac{a+b}{2} < \sqrt{a \cdot b}$
  - $a + b < 2 \cdot \sqrt{a \cdot b}$

Indirekter Beweis

- Beweis durch Widerspruch
- Behauptung:
  $a, b \geq 0$ sind zwei reele Zahlen und es gilt $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$
- Widerspruch: Es gilt $\frac{a+b}{2} < \sqrt{a \cdot b}$
  - $\frac{a+b}{2} < \sqrt{a \cdot b}$
  - $a + b < 2 \cdot \sqrt{a \cdot b}$
  - $(a + b)^2 < 4 \cdot a \cdot b$

Indirekter Beweis

- Beweis durch Widerspruch
- Behauptung:
  $a, b \geq 0$ sind zwei reele Zahlen und es gilt $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$
- Widerspruch: Es gilt $\frac{a+b}{2} < \sqrt{a \cdot b}$
  - $\frac{a+b}{2} < \sqrt{a \cdot b}$
  - $a + b < 2 \cdot \sqrt{a \cdot b}$
  - $(a+b)^2 < 4 \cdot a \cdot b$
  - $a^2 + 2ab + b^2 < 4 \cdot a \cdot b$

Indirekter Beweis

- Beweis durch Widerspruch
- Behauptung:
  $a, b \geq 0$ sind zwei reele Zahlen und es gilt $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$
- Widerspruch: Es gilt $\frac{a+b}{2} < \sqrt{a \cdot b}$
  - $\frac{a+b}{2} < \sqrt{a \cdot b}$
  - $a + b < 2 \cdot \sqrt{a \cdot b}$
  - $(a + b)^2 < 4 \cdot a \cdot b$
  - $a^2 + 2ab + b^2 < 4 \cdot a \cdot b$
  - $a^2 - 2ab + b^2 < 0$

Indirekter Beweis

- Beweis durch Widerspruch
- Behauptung:
  $a, b \geq 0$ sind zwei reele Zahlen und es gilt $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$
- Widerspruch: Es gilt $\frac{a+b}{2} < \sqrt{a \cdot b}$
  - $\frac{a+b}{2} < \sqrt{a \cdot b}$
  - $a + b < 2 \cdot \sqrt{a \cdot b}$
  - $(a + b)^2 < 4 \cdot a \cdot b$
  - $a^2 + 2ab + b^2 < 4 \cdot a \cdot b$
  - $a^2 - 2ab + b^2 < 0$
  - $(a - b)^2 < 0$

Indirekter Beweis

- Beweis durch Widerspruch
- Behauptung:
  $a, b \geq 0$ sind zwei reele Zahlen und es gilt $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$
- Widerspruch: Es gilt $\frac{a+b}{2} < \sqrt{a \cdot b}$
  - $\frac{a+b}{2} < \sqrt{a \cdot b}$
  - $a + b < 2 \cdot \sqrt{a \cdot b}$
  - $(a + b)^2 < 4 \cdot a \cdot b$
  - $a^2 + 2ab + b^2 < 4 \cdot a \cdot b$
  - $a^2 - 2ab + b^2 < 0$
  - $(a - b)^2 < 0$
  - $\rightarrow$ Widerspruch, das Quadrat einer reellen Zahl ist ≥ 0.

$\square$

Fragen?

https://pbs.twimg.com/profile_images/472920133414158336/8MqCNSsC.jpeg